REAL OPTIONS
CAPITOLO 4: CORPORATE REAL OPTIONS

Chiara D'Alpaos, Michele Moretto e Sergio Vergalli
Università di Brescia

Questa versione Dicembre 2007

Contents

1 LE OPZIONI DI INVESTIMENTO E DISINVESTIMENTO 2
1.1 Opzione di differimento (*Waiting-to-invest option*) 2
1.2 Opzione d'uscita (*Exit option*) 3
1.3 Opzione di opzione (*Compound option, Growth option*) 6

2 LE OPZIONI OPERATIVE 7
2.1 Valore di un'attività con opzione di sospensione (*Flexibility option*) 7
2.2 Riduzione ottimale della capacità produttiva (*Option to contract*) 10
2.3 Cambiamento di input, linea di prodotto e/o di una linea produttiva (*Option to switch*) 13
2.3.1 Option to switch europea 13
2.3.2 *Option to switch* perpetua: V per S 15
2.3.3 *Option to switch* perpetua: S per V 17

3 INVESTIMENTO SEQUENZIALE 17
3.1 La scelta di investimento da parte di un pianificatore centrale 18
3.2 Il caso di un'industria in concorrenza perfetta 21
3.3 La scelta di investimento da parte di un monopolista 24

1 LE OPZIONI DI INVESTIMENTO E DISINVESTIMENTO

1.1 Opzione di differimento (*Waiting-to-invest option*)

- McDonald e Siegel (1986)[1] studiano il tempo ottimale di investimento in un progetto irreversibile, senza che vi sia la possibilità di abbandare (flessibilità) il progetto una volta installato.

- Il valore del progetto è descritto da:

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dz \qquad \text{con } S_0 = S \tag{1}$$

- Per quanto detto nel primo capitolo se questo progetto non è commercializzato possiamo sostituire α con $\hat{\alpha} = r - \delta$. Dove δ indica il costo opportunità a tenere una posizione lunga nell'opzione. Cioè sono i profitti mancati dal ritardare l'avvio del progetto.

- Il valore d'opzione è di tipo Call Americana Perpetua, per cui omogenea rispetto al tempo: $F(S_t)$

- Ricordiamo che l'equazione differenziale per una Call perpetua risulta:

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS} + (r - \delta) S F_S - rF \tag{2}$$

- Le condizioni di contorno diventano:

$$F(S^*) = S^* - K \quad , \quad \text{Matching Value Condition}$$

$$F'(S^*) = 1 \;\; , \;\; \text{Smooth Pasting Condition}$$

$$\lim_{S \to 0} F(S) = 0$$

- Dove S^* è il valore soglia dell'attività che rende conveniente investire.

[1] McDonald R. e Siegel D. (1986), The Value of Waiting to Invest, *Quarterly Journal of Economics*, vol.101, n.4, pp.707-727

- Il valore dell'opzione diventa

$$F(S_t) = \begin{cases} AS_t^{\beta_1} & \text{per ogni } S_t < S^* \\ \\ S_t - K & \text{per ogni } S_t \geq S^* \end{cases} \tag{3}$$

- $A > 0$ è una costante da determinare e $\beta_1 > 1$ è la radice positiva dell'equazione quadratica

$$\Psi(\beta) = \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - r = 0 \tag{4}$$

- Sostituendo (3) nelle condizioni di contorno otteniamo:

$$S^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}K, \quad \text{con} \quad \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} > 1 \tag{5}$$

$$A(S^*) = \frac{1}{\beta_1}(S^*)^{1-\beta_1} > 0,$$

- Poichè l'investimento è irreversibile, il valore soglia che induce l'investimento è superiore al costo del progetto. In altri termini il criterio del VAN per decidere se investire oppure non investire diventa

VAN ESTESO = VAN + OPZIONE

1.2 Opzione d'uscita (*Exit option*)

- Myers e Majd (1990)[2], calcolano il valore di una opzione ad abbandonare in modo permanente un progetto con valore d'uscita positivo SA (*Salvage value*) ad una data scadenza T.

- L'esempio di riferimento può essere quello di una concessione di servizio per T anni. Il concessionario non può rinunciare ad offrire il servizio fino alla scadenza. Alla scadenza il contratto può essere rinnovato di comune accordo o chiuso da una delle parti. In questo caso il contratto di concessione è simile ad una put di tipo europeo.

[2] Myers S. e Majd S. (1990), Abandonment Value and Project Life, *Advances in Future and Options Research*, vol.4, pp.1-21.

- Il valore del progetto fintanto che rimane attivo è descritto da un processo Browniano geometrico del tipo:

$$dV_t = \alpha V_t dt + \sigma V_t dz_t \qquad \text{con } \sigma > 0 \text{ and } V_{t_0} = V_0. \tag{6}$$

- Indichiamo con $E(V, \tau)$, $\tau = T - t$, il valore dell'opzione d'uscita. Formalmente questa è simile ad una Put Europea, costruita su un asset sottostante che paga dividendi al tasso δ.

- dove δ già esprime la perdita di valore, in termini di flussi di cassa, costante e proporzionale al valore dell'attività stessa (dividendi): $\delta = \frac{CashFlows}{V}$.

- L'equazione differenziale parziale per questo problema è:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 E_{VV} + (r - \delta) V E_V - E_\tau - rE = 0 \tag{7}$$

- Le condizioni di contorno sono

$$E(V_T, \tau = 0) = \max[SA - V_T, 0],$$

$$E(0, \tau) = SA \quad \text{per ogni } \tau$$

$$\lim_{V \to \infty} E(V, \tau) = 0$$

- La soluzione è data dalla

$$E(V_t, \tau = T - t) = SAe^{-r(T-t)} N(-d_2) - V_t e^{-\delta(T-t)} N(-d_1) \tag{8}$$

  dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + [(r - D) + \frac{1}{2}\sigma^2](T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \text{ e } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

  e $N(.)$ è la funzione di ripartizione delle Normale standardizzata.

- **Poichè senza dividendi o con dividendi potrebbe essere ottimale esercitare la Put Europea prima della scadenza, passiamo a considerare il caso di una opzione di uscita Americana.**

- La caratteristica americana dell'opzione risiede nel fatto che l'impresa è sempre in grado di esercitare prima di T l'opzione e decidere di abbandonare il progetto. Gli esempi di economia industriale in cui questo può avvenire sono molteplici.

- Nel caso $T \to \infty$, l'opzione diventa **perpetua** ed ammette una soluzione analitica. Le condizioni di contorno si trasformano in

$$E(V^{**}) = SA - V^{**} \quad \text{Matching Value Condition}$$
$$E'(V^{**}) = -1 \quad \text{Smooth Pasting Condition}$$
$$\lim_{V \to \infty} E(V) = 0$$

- Dove V^{**} è il valore soglia dell'attività che rende conveniente uscire.

- Rovesciando la Matching Value Condition, possiamo scrivere il valore dell'opzione di abbandono come (*exit option*):

$$E(V_t) = \begin{cases} BV_t^{\beta_2} & \text{per ogni } V_t \geq V^{**} \\ \\ SA - V_t & \text{per ogni } V_t < V^{**} \end{cases}$$

- Se $E(V)$ è il valore dell'opzione di abbandono, il valore del progetto comprensivo dell'opzione d'uscita risulta:

$$VALORE_t = \begin{cases} V_t + E(V_t) \equiv V_t + BV_t^{\beta_2} & \text{per ogni } V_t \geq V^{**} \\ \\ SA & \text{per ogni } V_t < V^{**} \end{cases} \tag{9}$$

- $B > 0$ è una costante da determinare e $\beta_2 < 0$ è la radice negativa dell'equazione quadratica (4)

- Sostituendo (9) nelle condizioni di contorno otteniamo:

$$V^{**} = \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} SA, \quad \text{con} \quad \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} < 1 \tag{10}$$
$$B(V^{**}) = -\frac{1}{\beta_2}(V^{**})^{1-\beta_2} > 0,$$

- **Poichè l'abbandono è irreversibile il valore soglia che induce l'uscita è inferiore al valore di realizzo del progetto, l'impresa rimane in attività per un periodo più lungo nella speranza di recuperare le perdite.**
- In altri termini il valore dell'impresa attiva diventa:

$$\boxed{\textbf{VALORE = CASH FLOWS + OPZIONE AD USCIRE}}$$

1.3 Opzione di opzione (*Compound option, Growth option*)

- Geske (1979)[3], deriva una formula per valutare una Call Europea la quale consente di acquistare alla scadenza un'altra opzione Call Europea.
- **Nell'ottica delle opzioni reali, questo tipo di operazione riguarda la possibilità che un primo investimento consenta di acquisire informazioni sufficienti per far emergere l'opportunità di un nuovo e maggiore investimento.**
- Indichiamo con F il valore di un'opzione Call Europea che dà al suo possessore il diritto di acquistare alla scadenza T' al prezzo K un'altra opzione Call Europea che chiamiamo C, la quale è definita su un asset di valore S con maturità T e prezzo di esercizio I.
- In questo caso l'opzione F risulta un titolo il cui valore è direttamente contingente ad C e indirettamente contingente ad S.

$$F(C_t(S_t, \tau), \tau'), \qquad \text{dove} \quad \tau' = T' - t \quad \text{e} \quad \tau = T - t$$

- Assumendo che il valore del progetto S sia descritto da (1), il portafoglio in grado di replicante questa opzione di opzione da luogo ad una equazione differenziale parziale uguale a quella di Black-Merton-Scholes. La condizione di contorno tuttavia risulta essere

$$F(C_{T'}, 0) = \max[C_{T'} - K, 0]$$

[3] Geske R. (1979), The Valuation of Compound Options, *Journal of Financial Economics*, vol. 7, n. 1, pp.63-81.

- Poiche' la soluzione di $C_t(S_t,\tau)$ corrisponde alla soluzione proposta da Black-Merton-Scholes, Geske mostra che la soluzione dell'opzione di opzione su un asset che non paga dividendi diventa

$$F(C_t(S_t,\tau),\tau') = S_t B(h+\sigma\sqrt{\tau'}, k+\sigma\sqrt{\tau}, \rho) - Ie^{-r\tau}B(h,k,\rho) - Ke^{-r\tau'}N(h) \tag{11}$$

- dove

$$h = \frac{\ln(S_t/S^*) + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T'-t)}{\sigma\sqrt{T'-t}} \quad \text{e} \quad k = \frac{\ln(S_t/I) + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$C(S^*) = K$$

- Nella formula $B(a,b,\rho)$ rappresenta la funzione di ripartizione della normale bivariata con coefficiente di correlazione $\rho = \sqrt{\tau'/\tau}$, $N(a)$ è la funzione di ripartizione della normale standard ed infine S^* è il valore dell'asset sopra il quale l'opzione di opzione dovrebbe essere esercitata.

- La formula di Black-Merton-Scholes si ottiene come caso particolare imponendo $I = 0$ e $T = \infty$

2 LE OPZIONI OPERATIVE

2.1 Valore di un'attività con opzione di sospensione (*Flexibility option*)

- McDonald e Siegel (1985)[4] derivano il valore di una attività produttiva che possiede l'opzione di sospendere momentaneamente, a costo nullo, la produzione ogniqualvolta il prezzo scende sotto il costo operativo medio unitario e riprendere la produzione, sempre a costi nulli, quando il prezzo risale sopra il costo operativo medio.

- I prezzo è espresso da

$$dp_t = \alpha p_t dt + \sigma p_t dz_t \quad \text{con } \sigma > 0 \text{ and } p_{t_0} = p_0. \tag{12}$$

[4] McDonald R. e Siegel D. (1985), Investment and the Valuation of Firms when there is an Option to Shut Down, *International Economic Review*, vol.26, n.2, pp.331-349.

- Il profitto è descritto da

$$\pi_t = \max[p_t - c, 0] \tag{13}$$

- Il valore dell'attività è la somma infinita di valori d'opzione di tipo Call Europeo. Al tempo t_0, l'impresa possiede una serie (infinita) di opzioni che se esercitate alle loro date di scadenza $t > t_0$ consentono di pagare c per ricevere p_t.

- Gli autori mostrano che ognuna di queste opzioni può essere valutata con la formula di Black-Merton-Scholes, e che poi il valore dell'attività è la somma di questi valori d'opzione.

$$V(p_0, c, t) = e^{-rt}E(\pi_t) = e^{-rt}E[\max(p_t - c, 0)] = p_0 e^{-\delta t}N(d_1) - ce^{-rt}N(d_2) \tag{14}$$

- E quindi

$$V(p_0, c) = \int_0^{\infty} V(p_0, c, t)dt \tag{15}$$

- Un modo alternativo per ottenere il valore dell'attività è quello di costruire un portafoglio equivalente come nel capitolo precedente. Poichè, in questo caso l'attività genera un flusso di profitti (13), l'equazione differenziale diventa

$$\frac{1}{2}\sigma^2 p^2 V_{pp} + (r - \delta)pV_p - rV + \max[p_t - c, 0] = 0 \tag{16}$$

- La parte omogena dell'equazione è uguale a (2), con $V_\tau = 0$ perchè l'attività ha vita infinita.

- La parte non omogenea dipende dal caso in cui $p_t < c$ oppure $p_t > c$.

- Nella regione in cui $p_t \leq c$ la produzione è **Sospesa,** quindi il valore dell'attività non può che essere il valore dell'opzione di riprendere la produzione nel futuro

$$V^S(p_t, c) = Ap_t^{\beta_1} \tag{17}$$

- Nella regione in cui $p_t \geq c$ l'attività produttiva è **Attiva**, quindi il valore dell'impresa è uguale al valore atteso scontato dei profitti futuri come se l'attività continuasse indefinitivamente più l'opzione a sospendere la produzione nel caso in cui $p_t \leq c$.

$$V^A(p_t, c) = Bp_t^{\beta_2} + \frac{p_t}{\delta} - \frac{c}{r} \tag{18}$$

- Dove β_2 è la radice negativa dell'equazione (4). Mettendo assieme (17) e (18) possiamo scrivere il valore dell'attività produttiva come

$$V(p_t, c) = \begin{cases} Ap_t^{\beta_1} & \text{per } \; p_t \leq c \\ \\ Bp_t^{\beta_2} + \frac{p_t}{\delta} - \frac{c}{r} & \text{per } \; p_t \geq c \end{cases}$$

- Le condizioni di contorno determinano le costanti A e B

$$V^S(c, c) = V^A(c, c)$$

$$V_p^S(c, c) = V_p^A(c, c)$$

- Il sitema diventa

$$\begin{pmatrix} c^{\beta_1} & -c^{\beta_2} \\ \beta_1 c^{\beta_1 - 1} & -\beta_2 c^{\beta_2 - 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r-\delta}{\delta r} c \\ \frac{r-\delta}{\delta r} \end{pmatrix}$$

- La soluzione del sitema determina

$$A = \frac{c^{-(\beta_1 - 1)}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_2}{r} - \frac{\beta_2 - 1}{\delta} \right), \quad \text{e} \quad B = \frac{c^{1-\beta_2}}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\beta_1 - 1}{\delta} \right) \tag{19}$$

- Poichè A rappresenta il valore dell'opzione a ripredere l'attività se il prezzo risale sopra i costi, esso deve essere positivo, da cui $\frac{r-\delta}{r} > \beta_2$. Poichè B indica il valore dell'opzione a sospendere l'attività se il prezzo scende sotto i costi deve essere positivo, da cui $\frac{r-\delta}{r} > \beta_1$. Entrambe queste condizioni sono soddisfatte.

2.2 Riduzione ottimale della capacità produttiva (*Option to contract*)

- Moretto (2003)[5], studia il caso di un'impresa multimpianto la quale si trova a dover ridurre la propria capacità produttiva a fronte di una riduzione della domanda del proprio prodotto.

- L'impresa possiede n impianti distinti che possiamo indicizzare con j, $j = 1, 2....n$. Ogni impianto ha capacità produttiva pari a X_j, che possono essere ordinati in modo crescente. L'output totale dell'impresa è $X = \sum_1^n X_j$. Il costo operativo per unità di produzione è costante ed uguale in ogni impianto e pari a c. Inoltre il livello produttivo è vincolato dalla capacità e viene esclusa la possibilità che altri impianti possano essere installati o che impianti dismessi possano ritornare attivi (*Setup costs*). Gli impianti non si deprezzano mai (vita infinita).

- Il costo ad abbandonare un impianto è positivo e pari a K_j (**Costo d'uscita − Valore di realizzo**).

- Il prezzo dell'output dell'impresa è descritto da (12). Inoltre assumiamo che il tasso di sconto aggiustato per il rischio che indichiamo con $\mu = \alpha + \delta$ soddisfi la condizione $\mu \; > \alpha$.. Aggiungiamo, infine, l'assunzione che se il prezzo dell'output è zero, i costi d'uscita non sono sufficientemente alti da prevenire l'impresa dall'abbandonare alcuni impianti: $cX_j > \mu K_j$.

- **L'impresa aggiusta la propria capacità decidendo quando e quali impianti abbandonare. L'abbandono di un impianto è irreversibile.**

- Indicando con $V_n(p_t)$ il valore dell'impresa con n impianti attivi, questa sarà data dalla soluzione della solita equazione differenziale (2), per il caso in cui la vita degli impianti è infinita

$$\frac{1}{2}\sigma^2 p_t^2 V_n''(p_t) + (\mu - \delta)V_n'(p_t) - \mu V_n(p_t) + (p_t - c)X \; = 0 \qquad (20)$$

[5] Moretto M., (2003), "A Note on the Optimal Capacity Reduction by a Multiplant Firm: A Real Option Approach" *Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali*, v.50, n. 3, pp. 401-413.

- Imponendo la condizione di contorno $V_n(\infty) = 0$, la soluzione di (20) consiste di due parti

$$V_n(p_t) = A_n p_t^{\beta_2} + \left(\frac{p_t}{\delta} - \frac{c}{\mu}\right) X, \tag{21}$$

- dove A_n è un costante positiva da determinare e $\beta_2 < 0$ è la radice negativa della funzione caratterisitca (4).

- Da (21), il termine $\left(\frac{p}{\delta} - \frac{c}{\mu}\right) X$ indica il valore atteso scontato del flusso di profitti (cash flows) ottenuto dagli n impianti che rimangono attivi per sempre. Il termine $A_n p^{\beta_2}$, quindi, indica il valore che l'impresa attribuisce alla possibilità di aggiustare la sua capacità (chiudere alcuni impianti) nel futuro. In altre parole, questo termine rappresenta il valore corrente della somma dell'opzioni d'uscita (una per ogni impianto) possedute al tempo t dall'impresa.

- Facendo riferimento al caso precedente dove la sospensione dell'attività da parte dell'impresa risulta non costosa, in questo caso, poichè l'uscita è costosa, l'impresa deciderà quando e quale impianto abbandonare se il prezzo scende ad un livello $\bar{p}$ **molto al di sotto di** c.

- Per trovare il livello di soglia $\bar{p}$ si procede in questo modo. Si supponga che l'impresa abbia deciso di abbandonare l'impianto $i \in (1, 2, ...n)$ e indichiamo con n_{-i} la strategia di produzione dell'impresa con i rimanenti impianti. Il valore dell'impresa risulta ora

$$V_{n_{-i}}(p_t) = A_{n_{-i}} p_t^{\beta_2} + \left(\frac{p_t}{\delta} - \frac{c}{\mu}\right) (X - X_i), \tag{22}$$

  dove $(X - X_i) \equiv \sum_{j=1, j \neq i}^{n} X_j \equiv \sum_{1}^{n-i} X_j$. In (22), il termine $\left(\frac{p}{\delta} - \frac{c}{\mu}\right)(X - X_i)$ indica il valore atteso scontato dei profitti generati dai n_{-i} impianti attivi e il termine $A_{n_{-i}} p_t^{\beta_2}$ il valore corrente delle rimanenti opzioni d'uscita.

- L'impresa troverà ottimale abbandonare l' i-esimo impianto se esiste un valore di soglia $\bar{p}_i$ che soddisfa le seguente condizioni

$$V_n(\bar{p}_i) = V_{n_{-i}}(\bar{p}_i) - K_i \ , \quad \text{Matching Value Condition} \tag{23}$$

$$V_n'(\bar{p}_i) = V_{n_{-i}}'(\bar{p}_i) \ , \qquad \text{Smooth Pasting Condition} \tag{24}$$

- L'analisi può essere semplificata definendo l'incremento di valore che apporta all'impresa il mantenere in attività l'i-esimo impianto

$$G_i(p_t; \bar{p}_i) \equiv V_n(p_t) - V_{n_{-i}}(p_t) = \Delta A_i(\bar{p}_i) p_t^{\beta_2} + \left(\frac{p_t}{\delta} - \frac{c}{\mu} \right) X_i, \tag{25}$$

- dove la differenza $\Delta A_i(\bar{p}_i) \equiv [A_n(\bar{p}_i) - A_{n_{-i}}(\bar{p}_i)] p_t^{\beta_2}$ rappresenta il valore dell'opzione d'uscita (Put) relativa all'i-esimo impianto se il prezzo scende sotto il livello di soglia $\bar{p}_i$.

- Facendo uso di (25) la *value matching condition* e la *smooth pasting condition* si semplificano

$$G_i(\bar{p}_i; \bar{p}_i) = -K_i, \tag{26}$$

$$G_i'(\bar{p}_i; \bar{p}_i) = 0. \tag{27}$$

- La differenza $\Delta A_i(\bar{p}_i)$ e la soglia $\bar{p}_i$ sono uguali a

$$\Delta A_i = \frac{(\delta\beta)^{-\beta_2}}{((1-\beta_2)\mu)^{1-\beta_2}} X_i^{\beta_2} (cX_i - \mu K_i)^{1-\beta_2} > 0,$$

$$\bar{p}_i = \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} \frac{\delta}{\mu} (c - \mu \frac{K_i}{X_i}) \ , \quad \text{con} \ \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} < 1 \tag{28}$$

- Ora dobbiamo decidere quale impianto deve essere abbandonato. La decisone implica la massimizzazione del valore incrementale (25). Poichè p^{β_2} è sempre positivo, una variazione di $\bar{p}_i$ aumenta o diminuisce l'intero valore della funzione $G_i(p; \bar{p}_i)$ a seconda che la differenza $\Delta A_i(\bar{p}_i)$ aumenta o diminuisce. Questo semplifica notevolemte il problema di massimizzazione, si sceglie $\bar{p}_i$ in modo da rendere massimo $\Delta A_i(\bar{p}_i)$. Massimizzare il valore della Put significa, quindi, scegliere tra gli n impinati quello per il quale il termine $X_i^{\beta_2}(cX_i - \mu K_i)^{1-\beta_2}$ risulta massimo.

- Operativamente possiamo scrivere

$$G_i(p_t;\bar{p}_i) + K_i = F_0(p_t;\bar{p}_i) - F_i(p_t), \tag{29}$$

dove

$$F_0(p_t;\bar{p}_i) = \Delta A_i(\bar{p}_i)p_t^{\beta_2}, \text{ e } \quad F_i(p_t) = -\left(\frac{p_t}{\delta} - \frac{c}{\mu}\right) X_i - K_i$$

- **Il primo termine alla destra della (29),** $F_0(p)$, **indica il valore che l'impresa attribuisce all'opzione di chiudere l'impianto** i**-esimo. Quando la decione di abbandono è presa, l'impresa guadagna il valore della Put esercitata, ma perde sia il valore atteso scontato dei profitti che l'impianto avrebbe generato se fosse rimasto in attvità più il costo d'uscita,** $F_i(p)$. La "value matching condition" (26) bilancia questi due effetti.

- Per massimizzare la *put* option, e' sufficiente calcolare il punto di tangenza fra $F_0(p)$ con ogni $F_i(p)$ e scegliere l'impianto con il più alto valore di ΔA_i. La tangenza determina anche il valore di soglia $\bar{p}_i$.

- A seconda del rapporto fra capacità e costo d'uscita possiamo distinguere due casi:

  - (a) **I costi d'uscita crescono più che proporzionalmente della capacità degli impianti.**
  - (b) **I costi d'uscita crescono meno che proporzionalmente della capacità degli impianti.**

2.3 Cambiamento di input, linea di prodotto e/o di una linea produttiva (*Option to switch*)

2.3.1 Option to switch europea

- Margrabe (1978)[6] analizza il valore di un'opzione Call Europea di scambiare un titolo con un altro titolo.

[6] Margrabe, W. (1978), "The value of an option to exchange one asset for another", *Journal of Finance,* 33, 177-186.

- **Nell'ottica delle opzioni reali, questo tipo di operazione riguarda la possibilità che un progetto d'investimento o attività produttiva possano essere scambiate con altri progetti o attività correlati tra loro.**

- I due progetti sono descritti dai seguenti processi stocastici

$$dV_t = \alpha V_t dt + \sigma V_t dz_t \quad \text{con } \sigma > 0 \text{ and } V_{t_0} = V_0. \tag{30}$$

$$dS_t = \alpha' S_t dt + \sigma' S_t dz'_t \quad \text{con } \sigma' > 0 \text{ and } S_{t_0} = S_0. \tag{31}$$

  con coefficiente di correlazione tra i due processi $\rho = E(dz_t dz'_t)/dt$.

- Margrabe mostra che il valore di questa opzione, $F(V_t, S_t, \tau)$ può essere calcolato costruendo un portafoglio che vende allo scoperto F_V "units" dell'asset V e comperando F_S "units" dell'asset S. Questo portafoglio da luogo ad una equazione differenziale del tipo

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + \rho\sigma\sigma' VSF_{VS} + \frac{1}{2}\sigma'^2 S^2 F_{SS} + (r-\delta)VF_V + (r-\delta')SF_S - F_\tau - rF = 0 \tag{32}$$

- Dove δ e δ' esprimono le perdita di valore, in termini di flussi di cassa, costante e proporzionale al valore dell'attività stessa (dividendi): $\delta = \frac{CashFlows}{V}$.

- Il valore dell'opzione risulta

$$F(V_t, S_t, \tau) = V_t e^{-\delta(T-t)} N(d_1) - S_t e^{-\delta'(T-t)} N(d_2) \tag{33}$$

- Dove

$$d_1 = \frac{\ln(V_t/S_t) + [(\delta - \delta') + \frac{1}{2}s^2](T-t)}{s\sqrt{T-t}}, \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - s\sqrt{T-t}$$

$$s = \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2 - 2\rho\sigma\sigma'}$$

- **E' importante notare che sebbene il valore di ogni signolo asset dipende dal tasso d'interesse privo di rischio, la formula d'opzione a scambiare i due titoli (33) non dipende da** r.

- Con dividendi δ e δ', non esite una formula in forma chiusa per la Call Americana di scambiare un titolo con un altro titolo, tuttavia esiste una forma analitica per il caso perpetuo.

2.3.2 ***Option to switch* perpetua: V per S**

- Nel caso $T \rightarrow \infty$, l'opzione di "switch" diventa **perpetua** ed ammette una soluzione analitica.
- Le condizioni di contorno sono

$$
\begin{aligned}
F(V^{**}, S^{**}) = V^{**} - S^{**} \quad & \text{Matching Value Condition} \\
F_V(V^{**}, S^{**}) = 1 \quad \text{e} \quad F_S(V^{**}, S^{**}) = -1 \quad & \text{Smooth Pasting Conditions} \\
\lim_{V \rightarrow 0} F(V, S) = \lim_{S \rightarrow \infty} F(V, S) = 0 & \qquad (34)
\end{aligned}
$$

- Dove (V^{**}, S^{**}) individua la regione all'interno dello spazio (V, S) dove è conveniente esercitare l'opzione.
- Un argomento di omogeneità consente di ridurre l'equazione differenziale (32) ad una sola dimensione. Se V e S raddoppiano il loro valore, raddoppia anche il valore dell'opzione. Ne consegue che $F(V, S)$ è omogenea di grado uno

$$F(V, S) = SF(\frac{V}{S}, 1) = Sf(v), \qquad \text{dove} \quad v = \frac{V}{S} \qquad (35)$$

- E' possibile condurre l'analisi in termini di $f(v)$.

$$
\begin{aligned}
F_V(V, S) &= Sf'(v)\frac{1}{S} = f'(v) \\
F_S(V, S) &= f(v) + Sf'(v)\left(-\frac{V}{S^2}\right) = f(v) - vf'(v) \\
F_{VV}(V, S) &= f''(v)\frac{1}{S} \\
F_{VS}(V, S) &= f''(v)\left(-\frac{V}{S^2}\right) = -f''(v)\frac{v}{S} \\
F_{SS}(V, S) &= f'(v)\left(-\frac{V}{S^2}\right) - vf''(v)\left(-\frac{V}{S^2}\right) - f'(v)\left(-\frac{V}{S^2}\right) = f''(v)\frac{v^2}{S}
\end{aligned}
$$

- Sostituendo nella (32), questa si riduce a

$$\frac{1}{2}[\sigma^2-2\rho\sigma\sigma'+\sigma'^2]v^2f''(v)+(r-\delta)vf'(v)+(r-\delta')[f(v)-vf'(v)]-rf(v)=0$$

$$\frac{1}{2}[\sigma^2-2\rho\sigma\sigma'+\sigma'^2]v^2f''(v)+(\delta'-\delta)vf'(v)-\delta'f(v)=0 \qquad (36)$$

- La (36) è un'equazione differenziale ordinaria che puo' essere risolta condizionatamente ad alcune vincoli di contorno

$$f(v^{**})=v^{**}-1, \quad \text{Matching Value Condition}$$

$$f'(v^{**})=1, \quad \text{e} \quad f(v^{**})-v^{**}f'(v^{**})=-1, \quad \text{Smooth Pasting Conditions}$$

$$\lim_{v\to\infty} f(v)=0 \qquad (37)$$

- Una delle smooth pasting condition è di troppo. Nell'intervallo di v per cui non è conveniente esercitare l'opzione, la soluzione di (36) è del tipo

$$f(v)=Bv^{\gamma_2}, \quad \text{per} \quad v\geq v^{**} \qquad (38)$$

- $B>0$ è una costante da determinare e $\gamma_2<0$ è la radice negativa dell'equazione quadratica

$$\Psi(\beta)=\frac{1}{2}[\sigma^2-2\rho\sigma\sigma'+\sigma'^2]\gamma(\gamma-1)+(\delta'-\delta)\gamma-\delta'=0 \qquad (39)$$

- Sostituendo (38) nelle condizioni di contorno otteniamo:

$$v^{**}\equiv\frac{V^{**}}{S^{**}}=\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}, \quad \text{con} \quad \frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}<1 \qquad (40)$$

$$B(v^{**})=\frac{1}{\gamma_2}(v^{**})^{1-\gamma_2}>0,$$

- **E' immediato notare che (38) è equivalente al caso di un'attvità con opzione d'uscita stocastico, descritto da (9). Il valore dell'attività diventa:**

$$F(V_t,S_t)=\begin{cases} BV_t^{\gamma_2}S_t^{1-\gamma_2} & \text{per ogni } \frac{V_t}{S_t}\geq\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1} \\ S_t-V_t & \text{per ogni } \frac{V_t}{S_t}<\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1} \end{cases} \qquad (41)$$

2.3.3 *Option to switch* perpetua: S per V

- Nel caso l'investiore volesse scambiare il titolo S per il titolo V, l'analisi del paragrafo precedente rimane valida a meno della condizione (34) o (37), con
$$\lim_{v\to 0} f(v) = 0 \tag{42}$$
- Nell'intervallo di v per cui non è conveniente esercitare l'opzione, la soluzione di (36) è del tipo
$$f(v) = Av^{\gamma_1}, \quad \text{per} \quad v \leq v^* \tag{43}$$
- $A > 0$ è una costante da determinare e $\gamma_1 > 1$ è la radice positiva dell'equazione quadratica (39).
- Sostituendo (43) nelle condizioni di contorno otteniamo:
$$v^* \equiv \frac{V^*}{S^*} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}, \quad \text{con} \quad \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} > 1 \tag{44}$$
$$A(v^*) = \frac{1}{\gamma_1}(v^*)^{1-\gamma_1} > 0,$$
- **E' immediato notare che (43) è equivalente al caso di un'opzione di investimento con costo d'acquisto stocastico, descritto da (3). Il valore dell'opzione diventa:**
$$F(V_t, S_t) = \begin{cases} AV_t^{\gamma_1} S_t^{1-\gamma_1} & \text{per ogni } \frac{V_t}{S_t} \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \\ \\ V_t - S_t & \text{per ogni } \frac{V_t}{S_t} > \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \end{cases} \tag{45}$$

3 INVESTIMENTO SEQUENZIALE

- Questa parte fa riferimento a Dixit e Pindyck (1994, cap.9), Dixit (1995) e Leahy (1993)[7]

[7] Dixit A., (1995), "Irreversible Investment with Uncertainty and Scale Economies", *Journal of Economic Dynamic and Control*, 19, 327-350.

Dixit A., and R.S. Pindyck, (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton (NJ): Princeton University Press.

Leahy J. P., (1993), "Investment in Competitive Equilibrium: the Optimality of Myopic Behavior", *Quarterly Journal of Economics*, 108, 1105-1133.

3.1 La scelta di investimento da parte di un pianificatore centrale

- Consideriamo il caso di un'industria caratterizzata dalla seguente funzione di domanda:

$$P_t = Y_t D(Q_t), \qquad \text{con } \ D'(Q_t) < 0 \ \text{ e } D(0) = \hat{D} > 0 \tag{46}$$

- Q rappresenta l'output prodotto in ogni istante temporale dalle imprese che fanno parte dell'industria e anche il numero di imprese dell'industria. Cioè assumiamo che ogni singola impresa produca una unità di output per periodo.

- Il termine Y indica uno shock stocastico (gusti dei consumatori) che sposta la curva di domanda. Assumiamo che:

$$dY_t = \alpha Y_t dt + \sigma Y_t dz_t \quad \text{ con } \quad Y_0 = Y$$

- Ogni impresa per entrare nel mercato deve spendere un costo sunk pari a I costante e uguale per tutte e non ha costi operativi.

- Dalla (46) possiamo calcolare il surplus del consumatore come l'area che sta sotto la curva di domanda:

$$Y_t U(Q_t) = Y_t \int_{q=0}^{Q} D(q_t) dq_t \quad \text{ con } Q_0 = Q \tag{47}$$

- $U(Q_t)$ può essere interpretato come la funzione di utilità del consumatore rappresentativo e Y il termine stocastico che la influenza.

- Assumiamo ora che vi sia un pianificatore centrale benevolente in grado di decidere quanto deve essere prodotto in ogni istante temporale e quindi quante imprese devono far parte dell'industria. In assenza di costi operativi, il pianificatore negli interessi dei consumatori massimizzerà la seguente funzione di benessere sociale:

$$W(Q,Y) = \max_{Q_t} E\left[\int_{t=0}^{\infty} e^{-\hat{\alpha} t} Y_t U(Q_t) dt - e^{-\hat{\alpha} t} \sum_t I \Delta Q_t\right] \tag{48}$$

- Un semplice confronto con il Cap.1, si vede che il problema (48) corrisponde ad un problema di programmazione dinamica dove il costo di investimento $I \Delta Q_t$ avviene ogniqualvolta la capacità dell'industria aumenta, cioè $\Delta Q_t > 0$. Se invece $\Delta Q_t = 0$ non c'è nessun nuovo investimento e l'industria continua a produrre la stessa quantità di output.

- Facendo riferimento al Cap.1, il tasso di sconto può essere scritto come $\hat{\alpha} = \alpha + \delta = r + \lambda\sigma$.

- Se la capacità aumenta di ΔQ l'incremento di benessere sarà di $W_Q(Q, Y)\Delta Q$ mentre il costo sarà $I\Delta Q$. Quindi la condizione per investire per un dato valore di Y è:
$$W_Q(Q, Y) \geq I$$

- Poichè se Y aumenta ci si aspetta che anche $W_Q(Q, Y)$ aumenti, esisterà una funzione $Y_W(Q)$ tale per cui la condizione necessaria per investire risulta:
$$W_Q(Q, Y_W(Q)) = I \tag{49}$$

- Inoltre ci si aspetta che $Y_W'(Q) > 0$. Maggiore è la capacità produttiva dell'industria maggiore deve essere lo shock di domanda affinche risulti profittevole per altre imprese entrare nel mercato.

- Assumiamo che $Y < Y_W(Q)$, cioè Q è costante. Considerando un intervallo di tempo molto breve, dt, possiamo trasformare il problema di programmazione dinamica nel seguente modo:
$$W(Q, Y) = YU(Q)dt + e^{-\hat{\alpha}dt}E[W(Q, Y + dY)]$$
chiamata anche Equazione di Bellman.

- Espandendo la parte destra attorno al punto (Y) e tenendo conto del Lemma di Ito otteniamo (cioè eliminando i termini superiori al primo ordine):

$$
\begin{aligned}
&= YU(Q)dt + e^{-\hat{\alpha}dt}E[W(Q, Y + dY)] \\
&= YU(Q)dt + (1-\hat{\alpha}dt)E\left[\begin{array}{c} W(Q,Y) + V_Y(Q,Y)dY \\ +\frac{1}{2}W_{YY}(Q,Y)dY^2 + ... \end{array}\right] \\
&= YU(Q)dt + (1-\hat{\alpha}dt)\left[\begin{array}{c} W(Q,Y) + V_Y(Q,Y)E(dY) \\ +\frac{1}{2}W_{YY}(Q,Y)E(dY^2) + ... \end{array}\right] \\
&= YU(Q)dt + (1-\hat{\alpha}dt)\left[\begin{array}{c} W(Q,Y) + W_Y(Q,Y)\alpha Y dt \\ +\frac{1}{2}W_{YY}(Q,Y)\sigma^2 Y^2 dt + ... \end{array}\right] \\
&= W(Q,Y) + \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}W_{YY}(Q,Y)\sigma^2 Y^2 + W_Y(Q,Y)\alpha Y \\ -\hat{\alpha}W(Q,Y) + YU(Q) \end{array}\right] dt
\end{aligned}
$$

- Sostituendo questa espressione all'interno dell'equazione di Bellman otteniamo la seguente EDP:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 W_{YY}(Q,Y) + \alpha Y W_Y(Q,Y) - \hat{\alpha}W(Q,Y) + YU(Q) = 0 \quad (50)$$

- Considerando Q fissato la soluzione della (50) è al solito data soluzione dell'equazione omogenea + una soluzione particolare:

$$W(Q,Y) = A_W(Q)Y^{\beta_2} + B_W(Q)Y^{\beta_1} + \frac{YU(Q)}{\delta}$$

dove $\beta_2 < 0$ e $\beta_1 > 1$ sono le radici dell'equazione quadratica:

$$\Psi(\beta) = \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \hat{\alpha} = 0$$

- Se introduciamo la condizione di contorno che $\lim_{Y\to 0} W(Q,Y) = 0$ allora poniamo la costante $A_W(Q) = 0$.

- Il termine $B_W(Q)Y^{\beta_1}$rappresenta quindi il valore di tutte le opzioni di espansione della capacità produttiva nel futuro.

- Al solito per determinare la strategia di investimento ottimale per Q, deve valere la matching value condition e la smooth pasting condition. La matching value è data dalla f.o.c. (49):

$$W_Q(Q,Y) \equiv B'_W(Q)Y^{\beta_1} + \frac{YU'(Q)}{\delta} = I \quad (51)$$

- La smooth pasting è:

$$W_{QY}(Q,Y) \equiv B'_W(Q)\beta_1 Y^{\beta_1-1} + \frac{U'(Q)}{\delta} = 0 \tag{52}$$

- Mettendo a sistema le due equazioni e ricordando che $U' = D$, otteniamo:

$$P = YD(Q) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta I \tag{53}$$

e

$$B'_W(Q) = -\beta_1^{\beta_1}\left(\frac{\beta_1 - 1}{I}\right)^{\beta_1-1}\left(\frac{U'(Q)}{\delta}\right)^{\beta_1}$$

- **Si nota subito come dalla (53) si possa ottenere la regola di investimento:**

$$Y_W(Q) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta\frac{I}{D(Q)}$$

Ogniqualvolta Y supera $Y_W(Q)$ il regolatore ha convenienza ad aumentare Q, cioè far entrare nuove imprese, in modo da riportate l'uguaglianza (53).

3.2 Il caso di un'industria in concorrenza perfetta

- Consideriamo ora il processo d'entrata in un'industria in concorrenza perfetta. La condizione di concorrenza perfetta implica che ogni singola impresa non è in grado di influenzare in prezzo dell'output e che il numero ottimo di imprese che formano l'indutria è determinato dalla condizioni di profitti nulli all'entrata.

- Consideriamo per primo il valore di un'impresa già presente nel mercato che considera l'eventualità che altre imprese entreranno:

$$\begin{aligned} V(Q,Y) &= E_0\left[\int_{t=0}^{\infty} e^{-\hat{\alpha}t}P_t dt - e^{-\hat{\alpha}t}J_{[t=\tau]}I\right] \\ &= E_0\left[\int_{t=0}^{\infty} e^{-\hat{\alpha}t}Y_t D(Q_t)dt - e^{-\hat{\alpha}t}J_{[t=\tau]}I\right] \end{aligned} \tag{54}$$

dove $J_{[t=\tau]}$ è la funzione che indica la possibilità che le condizioni economiche possano indurre altre imprese ad entrare nel mercato. Il valore atteso è infatti fatto sotto la condizione che Q_t possa variare nel tempo.

- Per risolvere la (54), seguiamo il procedimento fatto nel caso precedente. Assumendo che nessuna nuova impresa decida di entrare, la $V(Q,Y)$ risulta dalla soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 V_{YY}(Q,Y) + \alpha Y V_Y(Q,Y) - \hat{\alpha} V(Q,Y) + YD(Q) = 0 \tag{55}$$

- La cui soluzione al solito risulta:

$$V(Q,Y) = B_{CP}(Q) Y^{\beta_1} + \frac{YD(Q)}{\delta} \tag{56}$$

- In quanto il termine $\frac{YD(Q)}{\delta}$ indica il valore atteso scontato dei flussi di profitto di un'impresa in assenza di altre entrate, il termine $B_{CP}(Q)Y^{\beta_1}$rappresenta la perdita di valore che un'impresa si aspetta dall'entrata di concorrenti nel mercato. Questo impone che la costante $B_{CP}(Q)$ risulti negativa.

- Per determinare questa costante consideriamo l'effetto della condizione di "free entry" su questa impresa marginale. Poichè in un mercato perfettamente concorrenziale ogni singola impresa si aspetta di avere profitti nulli all'entrata, per un fissato Q, esisterà un valore di Y tale per cui questa impresa si sarebbe trovata nell'indifferenza fra entrare o rimanere fuori (*matching value condition*):

$$V(Q,Y) \equiv B_{CP}(Q) Y^{\beta_1} + \frac{YD(Q)}{\delta} = I \tag{57}$$

- Ovviamente abbiamo anche la *smooth pasting condition:*

$$V_Y(Q,Y) \equiv B_{CP}(Q) \beta_1 Y^{\beta_1 - 1} + \frac{D(Q)}{\delta} = 0 \tag{58}$$

- Il comportamento competitivo mantiene il valore di un'impresa attiva sotto il valore I aumentanto il numero di imprese che entrano nel mercato.

- Mettendo a sistema le due equazioni otteniamo:

$$P = YD(Q) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta I \tag{59}$$

che risulta uguale a (53) ottenuta per il caso di un'economia centralizzata:

$$Y_{CP}(Q) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta\frac{I}{D(Q)}$$

- Per verificare che questo risultato è corretto prendiamo ora in considerazione un'impresa non attiva che decida di entrare nel mercato. Se indichiamo con $F(Q,Y)$ il valore di un'impresa non attiva e assumiamo che nessuna nuova impresa decida di entrare (o che l'impresa non attiva presuma di essere l'unica ad entrare), questa è uguale a:

$$F(Q,Y) = E_0\left\{e^{-\hat{\alpha}T}\left[\frac{YD(Q)}{\delta} - I\right]\right\} \tag{60}$$

dove T indica il momento dell'entrata

- La $F(Q,Y)$ risulta dalla soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 F_{YY}(Q,Y) + \alpha Y F_Y(Q,Y) - \hat{\alpha}F(Q,Y) = 0 \tag{61}$$

- La cui soluzione sarà:

$$F(Q,Y) = C_{CP}(Q)Y^{\beta_1}$$

- Per determinare la costante $C_{CP}(Q)$ come la regola di entrata imponiamo la *matching value condition*

$$F(Q,Y) \equiv C_{CP}(Q)Y^{\beta_1} = \frac{YD(Q)}{\delta} - I \tag{62}$$

- e la *smooth pasting condition:*

$$F_Y(Q,Y) \equiv C_{CP}(Q)\beta_1 Y^{\beta_1 - 1} = \frac{D(Q)}{\delta} \tag{63}$$

- Mettendo a sistema le due equazioni otteniamo:

$$P = YD(Q) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta I$$

che risulta uguale a (53) e (59):

$$Y_{CP}(Q) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta\frac{I}{D(Q)}$$

- Infine da (57)-(62), e da (58)-(63) calcolate nel punto $Y_{CP,}$ abbiamo:

$$V(Q, Y_{CP}) \equiv B_{CP}(Q) Y_{CP}^{\beta_1} + \frac{Y_{CP} D(Q)}{\delta} = C_{CP}(Q) Y_{CP}^{\beta_1} = F(Q, Y_{CP})$$

$$V_Y(Q, Y_{CP}) \equiv B_{CP}(Q) \beta_1 Y_{CP}^{\beta_1 - 1} + \frac{D(Q)}{\delta} = C_{CP}(Q) \beta_1 Y_{CP}^{\beta_1 - 1} \equiv F_Y(Q, Y_{CP})$$

da cui si ottiene:

$$B_{CP}(Q) = -\frac{I Y_{CP}(Q)^{-\beta_1}}{\beta_1 - 1} < 0 \tag{64}$$

$$C_{CP}(Q) = 0 \tag{65}$$

- **Si conferma che per l'impresa attiva la probabilità di altre entrate riduce il valore e che l'impresa non attiva si aspetta profitti nulli al momento dell'entrata.**

3.3 La scelta di investimento da parte di un monopolista

- Assumiamo ora che vi sia una sola impresa monopolista in grado di servire il mercato caratterizzato dalla funzione di domanda (46). L'impresa produce l'output con una funzione di produzione con rendimenti di scala costanti, perciò una unità di investimento in più è in grado di produrre una unità di output in più per periodo.

- In assena di costi operativi, la funzione di profitto del monopolista risulta:

$$\pi(Q_t, Y_t) = P_t Q_t \equiv Y_t D(Q_t) Q_t \qquad \text{con } \pi(0, Y_t) = 0 \tag{66}$$

- La funzione obiettivo del monopolista risulta:

$$M(Q, Y) = \max_{Q_t} E \left[\int_{t=0}^{\infty} e^{-\hat{\alpha} t} \pi(Q_t, Y_t) dt - e^{-\hat{\alpha} t} \sum_t I \Delta Q_t \right] \tag{67}$$

- Un semplice confronto con il Cap.1, si vede che anche il problema (67) corrisponde ad un problema di programmazione dinamica dove il costo di investimento $I\Delta Q_t$ avviene ogniqualvolta la capacità del monopolista aumenta, cioè $\Delta Q_t > 0$. Se invece $\Delta Q_t = 0$ non c'è nessun nuovo investimento e il monopolista continua a produrre la stessa quantità di output.

- Come nel caso precedente abbiamo che se la capacità aumenta di ΔQ l'incremento di profitti del monopolista saranno pari $M_Q(Q,Y)\Delta Q$ mentre il costo sarà $I\Delta Q$. Quindi la condizione per investire per un dato valore di Y è:
$$M_Q(Q,Y) \geq I$$

- Poichè se Y aumenta ci si aspetta che anche $M_Q(Q,Y)$ aumenti, esisterà una funzione $Y_M(Q)$ tale per cui la condizione necessaria per investire risulta:
$$M_Q(Q,Y^M(Q)) = I \tag{68}$$

- Inoltre ci si aspetta che $Y_M(Q) > 0$. Maggiore è la capacità produttiva del monopolista maggiore deve essere lo shock di domanda affinche gli risulti profittevole investire ancora.

- Seguendo i passaggi del caso precedente la soluzione del problema del monopolista sarà data dalla soluzione dell'equazione differenziale:
$$\frac{1}{2}\sigma^2 Y^2 M_{YY}(Q,Y) + \alpha Y M_Y(Q,Y) - \hat{\alpha} M(Q,Y) + \pi(Q,Y) = 0 \tag{69}$$

- Dalla quale otteniamo il valore del monopolista
$$W(Q,Y) = B_M(Q)Y^{\beta_1} + \frac{YD(Q)Q}{\delta}$$

- Al solito per determinare la strategia di investimento ottimale per Q, deve valere la matching value condition e la smooth pasting condition. La matching value è data dalla f.o.c. (68):
$$M_Q(Q,Y) \equiv B'_M(Q)Y^{\beta_1} + \frac{Y[D'(Q)Q + D(Q)]}{\delta} = I \tag{70}$$

- La smooth pasting è:

$$M_{QY}(Q,Y) \equiv B'_M(Q)\beta_1 Y^{\beta_1 - 1} + \frac{D'(Q)Q + D(Q)}{\delta} = 0 \qquad (71)$$

- Mettendo a sistema le due equazioni e ricordando che otteniamo:

$$\begin{aligned} Y[D'(Q)Q + D(Q)] &= \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta I \qquad (72) \\ P(1-\varepsilon) &= \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta I \end{aligned}$$

dove $\varepsilon = -\frac{D'(Q)Q}{D}$ è l'elasticità della domanda, da cui risulta che $D'(Q)Q + D(Q)$ deve essere positivo oppure $\varepsilon < 1$.

- Infine:

$$B'_M(Q) = -\beta_1^{\beta_1}\left(\frac{\beta_1 - 1}{I}\right)^{\beta_1 - 1}\left(\frac{D'(Q)Q + D(Q)}{\delta}\right)^{\beta_1}$$

- **Si nota subito come dalla (72) si possa ottenere la regola di investimento:**

$$Y_M(Q) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\delta\frac{I}{D'(Q)Q + D(Q)}$$

che risulta sempre crescente solo se assumiamo che $2D' + D''Q < 0$.**Ogniqualvolta** Y **supera** $Y_M(Q)$ **il monopolista ha convenienza ad aumentare** Q **in modo da riportate l'uguaglianza (72).**

- **Confrontando (53) con (72) abbiamo:**

$$Y_M(Q) > Y_W(Q)$$